Über eine Statistik der Verdeckungen und über die statistische Ableitung des Lambert-Beerschen Absorptionsgesetzes.

Von

A. Dobrowsky (Wien).

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 29. April 1946. Vorgelegt in der Sitzung am 27. Juni 1946.)

Betrachten wir einen Flüssigkeitsbereich mit emulgierten Teilchen (eT), der von parallelem Licht durchstrahlt wird. Der Anteil des durchgelassenen Lichtes ist dann von den gegenseitigen Verdeckungen abhängig und diese sind wieder durch den jeweiligen Verteilungszustand der eT bestimmt.

Es mögen die Lichtverhältnisse in einem solchen Raum in Abhängigkeit von der zufälligen Verteilung der eT untersucht werden. Um die Sache übersichtlicher zu gestalten, machen wir vorläufig drei vereinfachende Annahmen, auf die wir später noch zurückkommen:

1. Jedes der als gleichgroß angenommenen eT soll das Licht vollkommen absorbieren, auch die Oberfläche soll kein Reflexionsvermögen besitzen.

2. Um nicht mit teilweisen Verdeckungen rechnen zu müssen, stellen wir uns die eT als Würfel vor, eine Fläche soll immer senkrecht auf das einfallende Licht zu stehen kommen. Dazu wollen wir nur mit solchen Anordnungen der Würfel rechnen, bei denen die Projektionen der Würfelzentren ein quadratisches Netz bilden. Damit sind Überschneidungen der geworfenen Schatten vermieden. Als Maß der Konzentration nehmen wir das Verhältnis der emulgierten Phase (V_e) zum Gesamtvolum (V), das aus der emulgierten und zusammenhängenden Phase (V_z) besteht,

$$c = \frac{V_e}{V_e + V_z}. \tag{1}$$

3. Nun teilen wir den Raum in Prismen vom Volum

$$v_p = \frac{v_e}{c} \tag{2}$$

v_e soll das Volumen eines individuellen eT sein. Das Ganze kommt darauf hinaus, daß man Mikroräume errichtet, die durchschnittlich ein einziges eT enthalten. Über die Form der Mikroräume machen wir nur die Annahme, daß der Raum sich nicht in der Lichtrichtung erstrecken soll. Ein eT kann im Mikroraum nur

$$Z = \frac{1}{c} \tag{3}$$

verschiedene Stellungen einnehmen, deren Projektionen in der Lichtrichtung sich nicht decken sollen.

Nach diesen Voraussetzungen müßten wir die durchschnittliche Lichtabsorption im Raum berechnen können, wenn uns das Zufallsgesetz bekannt wäre, nach dem die eT in raschem zeitlichem Wechsel die möglichen einzelnen Mikroräume besetzen. Wir benötigen die Kenntnis der relativen Häufigkeit der mit unseren Voraussetzungen verträglichen eT-Anordnungen, die man bei sehr oft wiederholten Beobachtungen auffinden könnte.

A. Ableitung des *Lambert-Beer*schen Absorptionsgesetzes durch Spielen mit einem Würfel.

Um über die durch das Spiel des Zufalls geregelte und für die Lichtdurchlässigkeit entscheidende Stellung der eT im Mikroraum etwas zu erfahren, können wir ein Zufallsgerät, das sich für mehrere (n) unter sich gleich wahrscheinliche Zustände entscheiden kann, betätigen. Ein solches Zufallsgerät ist für $n = 2$ eine Münze (Kopf und Adler), für $n = 6$ ein Würfel, für $n = 37$ ein Roulette, auf jeden Fall aber ein Sack mit n Nummern, deren stets eine gezogen und wieder zurückgelegt wird.

Wenn wir uns der Bequemlichkeit halber für den Würfel entscheiden, so werden wir das zufällige Erscheinen der sechs Würfelflächen mit der zufälligen Besetzung von sechs verschiedenen Stellungen im Mikroraum in Analogie setzen können. Damit ist nach Formel 2 die Konzentration $c = 1/6$ festgelegt. Die Augenzahlen der aufeinander folgenden Würfe können wir dann den Besetzungsstellen der aufeinander folgenden Mikroräume zuteilen. Die im p-ten Wurf geworfene Augenzahl identifizieren wir einfach mit dem Vorhandensein eines eT in der n-ten Stellung des p-ten Mikroraumes. Wir würfeln so lange, bis jede Würfelfläche erschienen ist, das heißt, bis durch Besetzung aller sechs Stellungen eine vollkommene Verfinsterung des dahinter liegenden Raumes eingetreten ist. Dann brechen wir die Serie ab, denn die Art der Besetzung der noch folgenden Mikroräume brächte in optischer Hinsicht nichts Neues. Die durch eine Serie charakterisierte Mikroverteilung ordnen wir einem momentanen Zustand zu, die der nächsten Serie einem darauffolgenden Moment, der zeitlich so weit von dem ersten getrennt sei, daß eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung ausgeschlossen ist, d. h., daß während dieser Zeit die mittlere Wegstrecke des eT größer sei als die Längserstreckung des Mikroraumes.

Wir erhalten so Verteilungen, die durch das Gesetz des Zufalls bestimmt sind. Wir werden erwarten können, aus der Betrachtung einer großen Anzahl derartiger Verteilungen das allgemeine Absorptionsgesetz aufzufinden.

Folgendes läßt sich sofort voraussagen: Bei der ersten Betätigung des Zufallsgerätes muß eine von den n Bedingungen eintreten. Das setzen wir in Analogie mit einer Verfinsterung von $1/n$ des ersten Mikroraumes. Das Weitere muß sich zwischen zwei Extremen abspielen. Das Extrem der schnellsten gänzlichen Verdunkelung wird dann erreicht, wenn in den ersten n Mikroräumen n verschiedene Stellungen besetzt sind, die Wahrscheinlichkeit ist dafür

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Das Extrem der geringsten Verdunkelung tritt dann ein, wenn in p Mikroräumen immer dieselbe Stellung besetzt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{n^p}$.

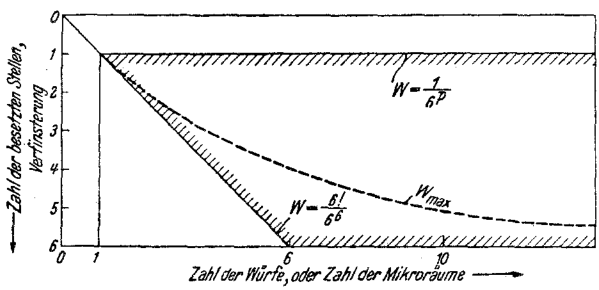

Abb. 1. Der Wahrscheinlichkeitsbereich für $n = 6$ ist schraffiert. W_{max} zeigt den wahrscheinlichsten Verlauf.

Nun zu den Versuchen:

In den ersten drei gewürfelten Serien erschienen die Augenzahlen:

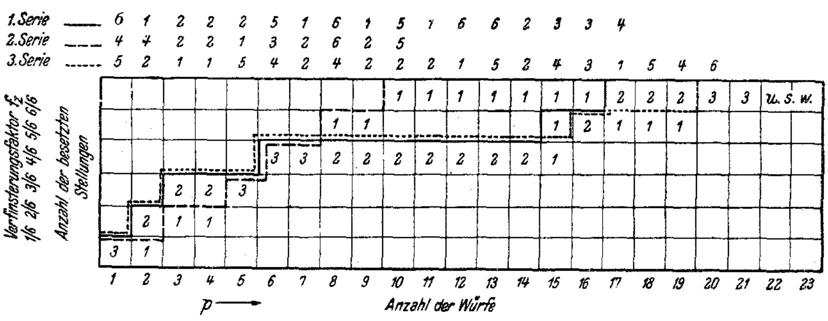

Abb. 2. Schema von 3 Wurfserien.

Auf das Optische übertragen bedeutet die Serie 1 folgendes: Im 1. Wurf ($p = 1$) erschien eine 6, daher denken wir uns im 1. Mikroraum die Stellung 6 mit einem eT besetzt. Von den $n = 6$ Stellungen im Mikroraum ist damit eine besetzt ($z = 1$) und $^1/_6$ des auffallenden Lichtes wird absorbiert. Durch den 2. Wurf ($p = 2$), es erschien eine 1, wird im 2. Mikroraum die Stellung 1 besetzt, womit im Ganzen zwei verschiedene Stellungen besetzt sind ($z = 2$) und $^2/_6$ des Lichtes absorbiert werden. Durch den 3. Wurf wird $z = 3$. Da aber im 4. und 5. Wurf eine 2 erscheint und wir demgemäß im 4. und 5. Mikroraum die Stellungen 2 besetzen müssen, ändert sich optisch nichts, die Zahl der verschieden besetzten Stellungen bleibt $z = 3$; denn das im 3. Mikroraum auf Stellung 2 stehende eT hat bereits alles in die Reihe der Stellungen 2 fallende Licht abgeschirmt und alle in den folgenden Mikroräumen auf den Stellungen 2 stehenden eT liegen im Dunkeln, können also nichts absorbieren. Erst durch das Erscheinen einer bis dahin noch nicht erschienenen Augenzahl, nämlich der 5 im 6. Wurf, erhöht sich z auf 4, es werden $^4/_6$ des Lichtes absorbiert und dieser Zustand bleibt, da weiter nur schon früher erschienene Augenzahlen geworfen werden, unverändert bis zum 15. Wurf, wo zum erstenmal eine 3 geworfen wird und damit $z = 5$ wird. Jetzt ist nur noch die Stellung 4 in allen 15 Mikroräumen unbesetzt geblieben, die einzige Stellung, durch die noch Licht dringt. Nachdem im 17. Wurf auch diese Augenzahl erschienen ist, ist $z = n$ geworden, d. h., alle möglichen Stellungen sind besetzt und damit alles einfallende Licht absorbiert. Hiermit brechen wir die Serie ab, denn die Besetzung der noch folgenden Mikroräume ist optisch ohne Folgen.

Die drei ersten Serien sind im Schema der Abb. 2 zusammengefaßt.

Die aus S-Serien resultierende Verfinsterung im p-ten Mikroraum ist

$$F_p = \frac{\sum_{1}^{n} z\, m_z \cdot f_z}{S} \tag{4}$$

mit der Nebenbedingung

$$S = \sum_{1}^{n} z \cdot m_z \tag{5}$$

dabei soll m_z die Anzahl der Serien angeben, in denen bis zum p-ten Wurf einschließlich, z verschiedene Würfelflächen erschienen sind, also die in das Schema eingeschriebenen Zahlen.

f_z ist der Verfinsterungsfaktor und gleich

$$f_z = \frac{z}{n}. \tag{6}$$

Die Lichtstärke ist natürlich

$$J_p = 1 - F_p. \tag{7}$$

Tabelle 1. Schema von 300 Wurfserien.

Anzahl der Würfe p ↓	Anzahl der besetzten Stellungen → z Verfinsterungsfaktor f_z 1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	$F_{\text{gef.}}$	$F_{\text{ber.}}$	$J_{\text{gef.}}$	$J_{\text{ber.}}$
							0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
1	300						1667	1667	8333	8333
	58	242					3011	3055	6989	6945
	10	122	168				4211	4213	5789	5787
	2	52	155	91			5189	5178	4811	4822
5	1	16	116	136	31		6000	5981	4000	4019
	1	4	66	160	66	3	6639	6651	3361	3349
		1	31	144	108	16	7261	7209	2739	2791
			10	126	129	35	7716	7675	2284	2325
			4	90	154	52	8078	8062	1922	1938
10			1	60	153	86	8450	8385	1550	1615
				36	159	105	8717	8654	1283	1346
				26	147	127	8894	8878	1106	1122
				24	124	152	9044	9065	0956	0935
				16	107	177	9228	9221	0772	0779
15				12	85	203	9394	9351	0606	0649
				8	69	223	9528	9459	0472	0541
				6	62	232	9589	9549	0411	0451
				5	55	240	9639	9624	0361	0376
				2	51	247	9694	9687	0306	0313
20				2	39	259	9761	9739	0239	0261
				1	33	266	9806	9783	0194	0217
				1	27	272	9839	9819	0161	0181
				1	24	275	9856	9849	0144	0151
					17	283	9905	9874	0095	0126
25					13	287	9928	9895	0072	0105
					11	289	9939	9913	0061	0087
					8	292	9956	9927	0044	0073
					5	295	9972	9940	0028	0060
					5	295	9972	9950	0028	0050
30					5	295	9972	9958	0028	0042
					4	296	9978	9965	0022	0035
					4	296	9978	9971	0022	0029
					3	297	9983	9975	0017	0025
					2	298	9989	9980	0011	0020
35						300	1,0000	0,9983	0,0000	0,0017

Schema von 300 Wurfserien.

Es wurden nun 300 Serien gewürfelt, deren längste 34 Würfe umfaßte, das Ergebnis ersieht man aus **Tabelle** 1, mit den nach 4 und 7 aus den Spielen abgeleiteten Absorptionsverhältnissen F_{gef} und J_{gef}.

Trägt man J_{gef} gegen p auf, so erhält man eine zunächst steil abfallende Kurve, die sich langsam der Abszisse nähert. Nehmen wir aber ein Koordinatensystem mit einer logarithmisch geteilten Ordinate, so

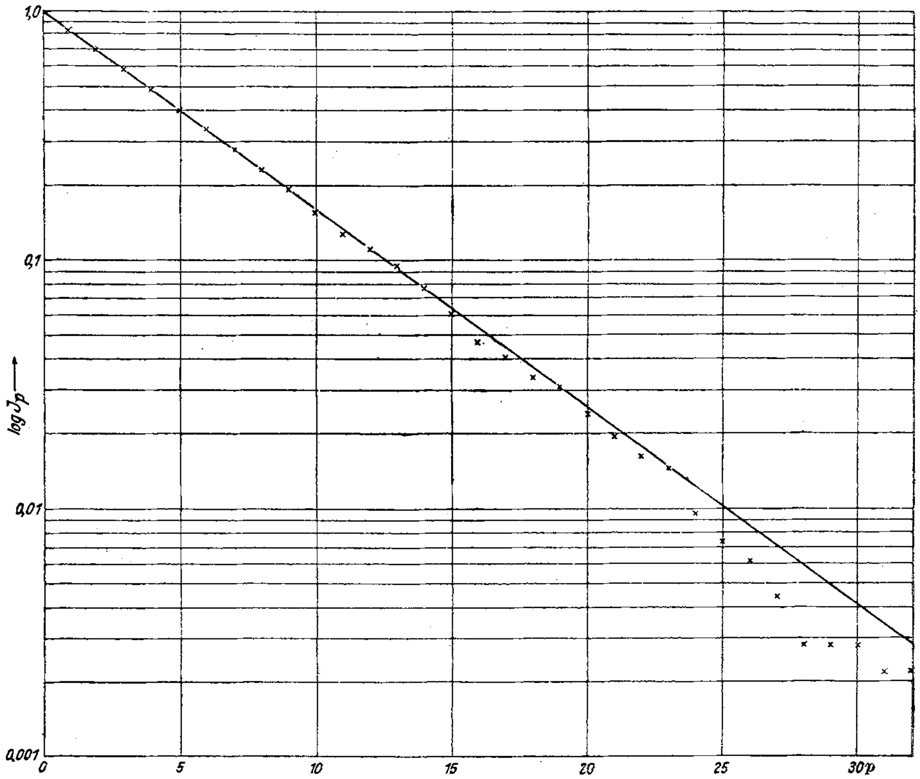

Abb. 3. J_p berechnet und aus den Würfelspielen gefunden.

erhalten wir eine Gerade (Abb. 3) und dieser, ohne Rechnung, nur durch das Würfelspiel erhaltene Befund, führt uns sofort zum optischen Absorptionsgesetz. $\frac{d \ln J}{dp}$ ist, wie man aus Tabelle 1 abliest, eine Konstante. Die Steigung der Geraden zwischen $p = 0$ und $p = 1$ folgt daraus, daß allgemein bei der ersten Betätigung eines der eingangs erwähnten Zufallsgeräte, eine von den n Möglichkeiten eintreten muß, daß es also, aufs Optische übertragen, zu einer Verfinsterung um eine Einheit der n-Einheiten kommen muß. $1/n$ ist aber nach 2 gleich der Konzentration c. Daher ist allgemein

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{n-1}{n}. \tag{8}$$

In unserem Fall muß $J_1 - J_0 = -1/6$ betragen und dies ist natürlich $-c$. Für den Bereich von $p = 0$ bis $p = 1$ war das von vornherein klar, die Auswertung der Würfelspiele zeigt aber, daß die Steigung auch darüber hinaus konstant bleibt, daß also

$$\frac{d\ln J}{dp} = -c \tag{9}$$

ist, woraus unmittelbar das *Lambert*sche Gesetz mit der *Beer*schen Erweiterung

$$J_p = J_0 e^{-cp} \tag{10}$$

folgt.

In Abb. 3 weicht die experimentell gefundene Linie bei größeren p-Werten merklich von der Geraden ab, aber das ist bei der relativ geringen Anzahl von 300 Serien selbstverständlich, weil das statistische Material bei den seltener eintretenden Fällen verarmt. Bei einer größeren Serienanzahl würde das Gebiet der geraden Linie weiter hinausgeschoben, aber nach einer gewissen Grenze wären die vorliegenden experimentellen Werte ebenso lückenhaft. In gleicher Art ist es auch der geringen Serienanzahl zuzuschreiben, daß die längste beobachtete Serie nur 34 Würfe umfaßt. Theoretisch müßten nach (unendlich) langen Zeiten sich auch (unendlich) lange Serien einstellen.

B. Um den statistisch zu erwartenden Wert von $J_p(n)$ zu berechnen, wollen wir unter Beibehaltung der in Teil A getroffenen Annahmen die Zahl aller überhaupt denkbaren Verteilungen in Vergleich setzen mit der Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Verteilungsarten mit Berücksichtigung ihres jeweiligen Verfinsterungswertes.

Die Frage ist: Auf wieviel Arten können p Kugeln auf z Schalen verteilt werden, die ihrerseits auf n Plätze gestellt werden können, wenn auf jedem Platz nur für eine Schale Raum ist?

Dazu sind folgende Teilfragen zu beantworten:

1. In wieviel Verteilungen lassen sich p Kugeln in z Schalen legen? Gleichbedeutend ist die Frage: Auf wie viele Arten läßt sich die Zahl p in z Summanden zerlegen? ($z \leqq p$). Dies soll auf q Arten möglich sein, q muß durch Probieren gefunden werden.[1] Für jede der q Verteilungsarten besteht die Bedingung

$$\sum_1^z {}_a S_a = p. \tag{11}$$

2. Auf wie viele Arten können z Schalen, unter denen sich $g_1, g_2 \ldots$ gleiche befinden, auf n Plätze gestellt werden, wenn auf jeden Platz nur

[1] Für dieses Diszerptionsproblem gibt es nur für $z \leqq 3$ Formeln.

Tabelle 2. Berechnung aller

Gesamtabsorption $\frac{50{,}700.551}{60{,}466.176} =$

z = Zahl der Summanden	Summanden s_z, q, a	q_z = Anzahl der Zerlegungen in z Summanden	$\binom{n}{z}$	g = Anzahl der gleichen Summanden g_1	g_2	$\frac{z!}{g_1!\,g_2!}$	1. Kontrolle $\sum_1^{q_z} \frac{z!}{g_1!\,g_2!} = \binom{p-1}{z-1}$	$\binom{n}{z}\frac{z!}{g_1!\,g_2!}$	$\frac{p!}{s_1!\,s_2!\ldots s_z!}$
1	10	1	$\binom{6}{1} = 6$	0	0	1	$1 = \binom{9}{0}$	6	1
2	91		$\binom{6}{2} = 15$	0	0	2		30	10
	82			0	0	2		30	45
	73	5		0	0	2	$9 = \binom{9}{1}$	30	120
	64			0	0	2		30	210
	55			2	0	1		15	252
3	811		$\binom{6}{3} = 20$	2	0	3		60	90
	721			0	0	6		120	360
	622			2	0	3		60	1260
	631	8		0	0	6	$36 = \binom{9}{2}$	120	840
	541			0	0	6		120	1260
	532			0	0	6		120	2520
	442			2	0	3		60	3150
	433			2	0	3		60	4200
4	7111		$\binom{6}{4} = 15$	3	0	4		60	720
	6211			2	0	12		180	2520
	5311			2	0	12		180	5040
	5221			2	0	12		180	7560
	4411	9		2	2	6	$84 = \binom{9}{3}$	90	6300
	4321			0	0	24		360	12600
	4222			3	0	4		60	18900
	3331			3	0	4		60	16800
	3322			2	2	6		90	25200
5	61111		$\binom{6}{5} = 6$	4	0	5		30	5040
	52111			3	0	20		120	15120
	43111			3	0	20		120	25200
	42211	7		2	2	30	$126 = \binom{9}{4}$	180	37800
	33211			2	2	30		180	50400
	32221			3	0	20		120	75600
	22222			5	0	1		6	113400

Komplexionen für den Fall $n=6$, $p=10$.

$=$ 83,85% ber. (nach 19)
84,50% gef. (nach Abb. 5).

$K_{z,q}$	$\sum_1^q K_{z,q}$	ber. $F_z = 100 \frac{\Sigma K_{z,q}}{n^p}$	f_z = Verfinsterungsfaktor = $= z/n$	$\sum_1^q K_{z,q} \cdot f_z$	gef. F_z aus den Würfelspielen Abb. 5
6	6	10^{-5}	$\frac{1}{6}$	1	—
300 1350 3600 6300 3780	15330	0,025	$\frac{2}{6}$	5110	—
5400 43200 75600 100800 151200 302400 189000 252000	1119600	1,7	$\frac{3}{6}$	559800	1 : 3 = 0,3
43200 453600 907200 1360800 567000 4536000 1134000 1008000 2268000	12277800	20,3	$\frac{4}{6}$	8185200	60 : 3 = 20,0
151200 1814400 3024000 6804000 9072000 9072000 680400	30618000	50,7	$\frac{5}{6}$	25515000	153 : 3 = 51,0

z = Zahl der Summanden	Summanden $s_{z,\,q,\,a}$	q_z = Anzahl der Zerlegungen in z Summanden	$\binom{n}{z}$	q = Anzahl der gleichen Summanden g_1	g_2	$\frac{z!}{g_1!\,g_2!}$	1. Kontrolle $\sum\limits_1^{q_z} \frac{z!}{g_1!\,g_2!} = \binom{p-1}{z-1}$	$\binom{n}{z}\frac{z!}{g_1!\,g_2!}$	$\frac{p!}{s_1!\,s_2!\ldots s_z!}$
6	511111	5	$\binom{6}{6} = 1$	5	0	6	$126 = \binom{9}{5}$	6	30240
	421111			4	0	30		30	75600
	331111			4	2	15		15	100800
	322111			3	2	60		60	151200
	222211			4	2	15		15	226800

2. Kontrolle $\sum\limits_1^{q} \sum\limits_1^{z} \binom{n}{z} \frac{z_q!}{g_1!\,g_2!} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!} = 3003$

3. Kontrolle $\sum\limits_1^{z} \sum\limits_1^{q} K_{z,\,q} =$

eine Schale gestellt werden kann? Entweder überlegt man so: Auf wie viele Arten kann man aus n vorhandenen Plätzen z Plätze für die Schalen herausgreifen? Dies ist auf $\binom{n}{z}$ Arten möglich. Auf wieviel Arten kann man die $\binom{n}{z}$ gewählten Plätze mit z Schalen besetzen, wenn unter diesen $g_1, g_2 \ldots$ gleiche sind?

Dies ist auf $\frac{z!}{g_1!\,g_2!\ldots} = \frac{z!}{\prod\limits_1^{i} g_i!}$ Arten möglich. Daher lautet die Antwort auf 2

$$\binom{n}{z} \frac{z!}{\prod\limits_1^{i} g_i!}. \tag{12}$$

Oder man kann so verfahren: Durch Variation ohne Wiederholung können die Schalen in $\frac{n!}{(n-z)!}$ facher Weise aufgestellt werden. Sind $g_1, g_2 \ldots$ gleiche darunter, ist dann mit $\frac{1}{g_1!\,g_2!\ldots}$ zu multiplizieren, das gibt

$$\frac{n!}{(n-z)} \frac{1}{\prod\limits_1^{i} g_i!}, \tag{13}$$

was mit dem vorhin erhaltenen Ausdruck identisch ist.

3. Auf wie viele Arten können p numerierte Kugeln in z Schalen gelegt werden, wenn die einzelnen Schalen $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_z$ Kugeln enthalten? Dies ist auf

$$\frac{p!}{s_1!\,s_2!\ldots s_z!} = \frac{p!}{\prod\limits_1^{z} s_i!}. \tag{14}$$

Arten möglich.

$K_{z,q}$	$\sum_1^q q\, K_{z,q}$	ber. $F_z = 100 \frac{\Sigma K_{z,q}}{n^p}$	f_z = Verfinsterungsfaktor = z/n	$\sum_1^q q\, K_{z,q} \cdot f_z$	gef. F_z aus den Würfelspielen Abb. 5
181440 2268000 1512000 9072000 3402000	16435440	27,3	$\frac{6}{6}$	16435440	86 : 3 = 28,7
	$= n^p = 60466176$	100,0		50700551	

Daran schließt sich noch:

4. Der wievielte Teil aller ursprünglich vorhandenen n Plätze ist durch Schalen besetzt? Der Anteil der besetzten Plätze ist

$$\frac{z}{n} = f_z \tag{15}$$

und dies ist der Verfinsterungsfaktor.

Eine bestimmte Komplexion läßt sich auf

$$K_{z,q} = \binom{n}{z} \frac{z!}{\prod\limits_1^i g_i!} \frac{p!}{\prod\limits_{a=1}^z s_{z.q.a}!} \tag{16}$$

fache Weise realisieren. Da die Zahl aller überhaupt denkbaren Komplexionen

$$K = n^p \tag{17}$$

ist, ist die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von z Plätzen, also einer Verfinsterung im Ausmaß von $\frac{z}{n}$ gleich

$$F_z = \frac{\sum\limits_1^q K_{z,q}}{n^p}. \tag{18}$$

Die gesamte resultierende Verfinsterung ist

$$F = \frac{\sum\limits_1^z \sum\limits_1^q K_{z,q}}{n^p} \tag{19}$$

somit die Lichtintensität

$$J = 1 - \frac{\sum\limits_1^z \sum\limits_1^q K_{z,q}}{n^p}. \tag{20}$$

In Tabelle 1 ist die vollständige Berechnung des Falles $n = 6$, $p = 10$ durchgeführt, daneben sind die dem Würfelspiel entnommenen Werte angeführt. Die Übereinstimmung ist vorzüglich.

Die Tabelle zeigt auch die zeitlichen Lichtintensitätsschwankungen im Mikroraum; so z. B. wird es in einem Raum, in dem die emulgierte Phase $^1/_6$ des Gesamtvolumens ausmacht, ($n = 6$) in einer Durchstrahlungstiefe von 10 Teilchendurchmessern ($p = 10$) in 27,3% aller Momenten zur vollkommenen Verfinsterung kommen und in 1,7% zur halben Intensität usw.

Die bisher gemachten Vereinfachungen lassen sich natürlich auch auf kugelförmige Teilchen übertragen, wobei sich nur Konstanten ändern. So kommt es zu einer halben Verdeckung der Projektionsfläche schon bei einem Abstand der Mittelpunkte von 0,404 Durchmessern (beim Würfel 0,5). Bei Verdopplung dieser Abstände ist die Verdeckung beim Würfel eben null, bei der Kugel rasch abfallend noch 4%.

Im übrigen zeigt die Erfahrung, daß wir die Vereinfachungen auch auf Moleküle und Ionen anwenden können.

Zusammenfassung.

Die Lichtabsorption in einer Emulsion oder Lösung ist von der Anordnung der absorbierenden Teilchen abhängig.

Die Wahrscheinlichkeit der Anordnungen wird in Teil A durch Betätigung eines Zufallmechanismus (Würfel) erforscht, woraus sich ohne Rechnung das *Lambert-Beer*sche Gesetz ergibt.

In Teil B folgt die Rechnung nach den Prinzipien der Kombinatorik.

Die erhaltenen Resultate gehen insofern über das *Lambert-Beer*sche Gesetz hinaus, als sie die zeitlichen Schwankungen der Lichtintensität in Mikroräumen erkennen lassen.